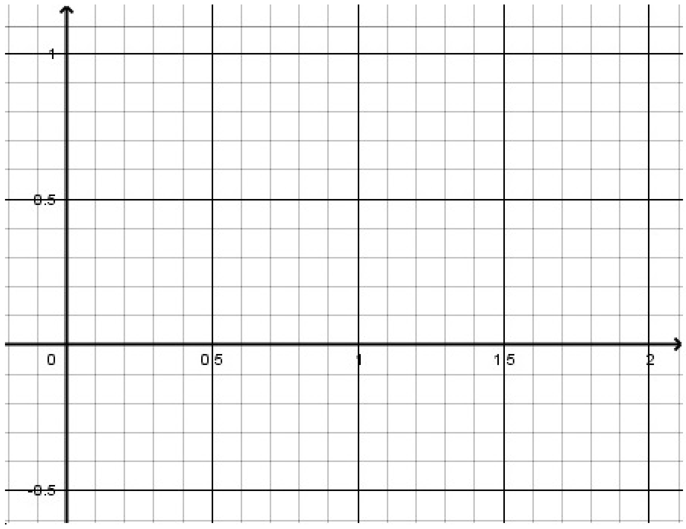
Objectif de la méthode d'Euler : construire la courbe (approchée) d'une fonction mystère dont on ne connait pas l'expression mais dont on connait
- la dérivée
- un point

Pour l'exemple, on choisira :
- la dérivée : $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- un point : $(1;0)$ autrement dit $f(1) = 0$

On admet l'existence d'une telle fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ (il s'agit donc d'une fonction mystère dont la dérivée est la fonction inverse). La méthode d'Euler permet d'obtenir une représentation approchée de la courbe C_f représentative de f dans un repère.

Partie A :



1. Déterminer l'équation générale d'une tangente T_a à la courbe théorique C_f au point d'abscisse a.

2. Le seul point dont nous sommes surs qu'il est sur C_f est le point de coordonnées $(1;0)$ car $f(1) = 0$. Autour de ce point nous savons que la courbe C_f n'est pas très éloignée de la tangente T_1.
   (a) Déterminer une équation de T_1.

   (b) T_1 n'est la meilleure approximation affine de C_f que très localement autour de 1 donc nous choisissons de placer un point d'abscisse très proche de 1 comme $x = 1{,}1$ (c'est à dire que nous avons ajouté un pas de 0,1 à notre abscisse 1).
   Déterminer grâce à l'équation de T_1 une valeur approchée de $y = f(1{,}1)$.

   (c) Placer le point de coordonnées $(x;y)$ correspondant.
3. On cherche maintenant une approximation du point d'abscisse $x = 1{,}2$. 1,2 est proche de 1,1 or $T_{1,1}$ est la meilleure approximation de C_f autour de $a = 1{,}1$.
   (a) Déterminer une équation de $T_{1,1}$.

   (b) En déduire une valeur approchée de $y = f(1{,}2)$.

   (c) Placer le point de coordonnées $(x;y)$ correspondant.
4. A vous de chercher maintenant une approximation du point d'abscisse $x = 1{,}3$ et placer le point de coordonnées $(x;y)$ correspondant.

Partie B : Algorithmes et programmation

La démarche peut être réitérée un grand nombre de fois pour obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f. Plus on s'éloigne du point initial, plus notre courbe approchée s'éloigne de la courbe théorique. Néanmoins, avec un pas petit comme 0.01, l'approximation reste excellente. Il faut donc calculer et placer de très nombreux points, l'utilisation d'un programme va nous accélérer le travail.

1. L'algorithme ci-dessous permet de construire une partie de la courbe C_f correspondant à des abscisses supérieures à 1 :

   Algorithm 1

   $x \leftarrow 1$
   $y \leftarrow 0$
   afficher le point de coordonnées $(x; y)$
   $pas \leftarrow 0.01$
   pour n allant de 1 **à** 1000 **faire**
       $x \leftarrow x + pas$
       $y \leftarrow y + y * pas$
       afficher le point de coordonnées $(x; y)$
   fin pour

   (a) Listez les variables et préciser leur type :

   (b) Combien de points place-t-on ? En déduire sur quel intervalle on construit la courbe.

   (c) Complétez l'algorithme afin de construire également la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ correspondant aux abscisses $x \in]0; 1]$.

2. On voudrait maintenant traduire notre algorithme dans un langage informatique pour le faire exécuter et admirer notre résultat.
   Vous vous rendrez sur le site www.angeliquerenaud.com pour récupérer le programme Python.
   Pour cela, le plus simple et d'ouvrir Pyzo sur l'ordinateur, y ouvrir un nouveau fichier de script (Fichier -> Nouveau) et y copier coller le contenu du fichier lnmethodedeuler.py
   Il est déjà fonctionnel (on le lance avec F5). Une nouvelle fenêtre contenant le graphique est créée (parfois on ne voit que son onglet).

   L'implémentation en Python est légèrement différente car on n'affiche pas au fur et à mesure les points mais on remplit d'abord un « tableau »de valeurs (composé de deux lignes lignex et ligney) puis à la fin on affiche tous les points de ce « tableau ».

   Complétez le code pour faire afficher la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ correspondant aux abscisses $x \in]0; 1]$.

   Vous obtenez la courbe de la fonction logarithme népérien, car M Neper a eu l'idée avant vous de construire cette courbe.

3. Vous pouvez modifier la fonction dérivée et le point de départ pour construire votre propre fonction mystère et lui donner votre nom ! Si elle s'avère inédite et utile vous deviendrez célèbre (mais pas riche, désolée !)