Probabilités : variables aléatoire discrètes

I. Evénements et loi de probabilité

Définitions 1.1 : On fait une expérience aléatoire (c-à-d dont on ne connaît pas forcément l'issue à l'avance).

- Une issue est un des résultats possibles (c'est-à-dire qui peut arriver).
- L'ensemble des issues est appelé univers.
- Un événement est un ensemble (éventuellement vide) d'issues.
- Un événement élémentaire est un événement qui contient une seule issue.
- Un événement certain est un événement qui contient toutes les issues.
- Un événement impossible est un événement qui ne contient aucune issue.

Remarque 1.2 : En seconde, on ne considère que des univers finis : on parle de variables aléatoires discrètes.

Définitions 1.3 :

- Définir une variable aléatoire X sur un univers (fini), c'est associer à chaque issue de cet univers un réel de l'intervalle [0 ; 1] , appelé probabilité de cette issue, de sorte que la somme de toutes les probabilités des issues de l'univers soit égale à 1 . En d'autres termes, si $x_1 ; ... ; x_n$ sont toutes les issues possibles (où n est un entier naturel non nul), la variable aléatoire X leur associe respectivement les réels $p_1 ; ... ; p_n$ tous compris entre 0 et 1 de sorte que $p_1+...+p_n=1$.
  Pour i variant de 1 à n , on note $p_i=P(X=x_i)$.
- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X , c'est donner la probabilité $P(X=x_i)$ pour i variant de 1 à n (la probabilité de chaque issue). On peut présenter ces informations dans un tableau.
- La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités de ses issues, on la note $P(A)$.

Exemple 1.4 : Dans un boîte opaque il y a 20 boules indiscernables au toucher : 5 bleues, 5 blanches et 10 rouges. On tire une boule au hasard et on note X la variable aléatoire associée à la couleur de la boule. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Réponse : Donner la loi de probabilité signifie associer à chaque issue sa probabilité (un nombre entre 0 et 1) : on peut présenter sous forme de tableau. Penser à vérifier que la somme des probabilités vaut 1 .

Couleur	Bleu	Blanc	Rouge
Probabilité	$\frac{5}{20}=0{,}25$	$\frac{5}{20}=0{,}25$	$\frac{10}{20}=0{,}5$

Remarques 1.5 : La probabilité d'un événement peut être interprétée comme un pourcentage de « chances » que cet événement se produise (il suffit de multiplier la probabilité par 100 pour obtenir un pourcentage).

- Une probabilité de 0 correspond à 0 % de « chances » de se produire (ça n'arrive jamais).
- Une probabilité de 1 correspond à 100 % de « chances » de se produire (ça arrive forcément).
- Une probabilité de $p\in[0 ; 1]$ correspond à 100 p % de « chances » de se produire : par exemple une probabilité de 0,3 signifie 30 % de « chances » de se produire car $0{,}3\times100=30$.

Exemple 1.6 : On note X la variable aléatoire associée à la couleur des yeux des élèves d'un lycée.

Couleur	Bleu clair	Bleu foncé	Vert clair	Vert foncé	Marron clair	Marron foncé
Probabilité	0,1	0,15	0,2	0,05	0,2	0,3
Pourcentage	10 %	15 %	20 %	5 %	20 %	30 %

II. Equiprobabilité

Définition 2.1 : On dit qu'il y a équiprobabilité quand toutes les issues ont la même probabilité.

Propriété 2.2 : Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est $P(A)=\dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$.

Exemple 2.3 : Dans un boîte opaque il y a 50 boules indiscernables au toucher dont 10 rouges.
On tire une boule au hasard dans cette boîte. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

Réponse : On a 10 chances sur 50 de tomber sur une boule rouge, la probabilité est donc $\dfrac{10}{50}=0{,}2$.

III. Contraire, union, intersection

Définition 3.1 : Soit A un événement. L'événement contraire de A est l'événement réalisé si et seulement si A ne l'est pas. On le note $\overline{A}$.

Propriété 3.2 : Soit A un événement. On a l'égalité $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Définitions 3.3 : Soient A et B deux événements.

- L'intersection de A et B est l'événement réalisé si et seulement si les événements A et B le sont. On le note $A\cap B$ et on lit « A inter B » : les événements A ***et*** B sont réalisés.
- L'union de A et B est l'événement réalisé si et seulement si (au moins) un des événements A ou B l'est. On le note $A\cup B$ et on lit « A union B » : l'événement A ***ou*** l'événement B est réalisé.

Remarques 3.4 :

- Dans la définition précédente, le « ou » est un « ou inclusif », c-à-d un « et/ou » qui signifie « l'un ou l'autre ou les deux ».
- On peut utiliser un diagramme pour représenter une telle situation.

Propriété 3.5 : Soient A et B deux événements. On a l'égalité $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Interprétation : Pour avoir ce qui est dans A ou dans B (on rappelle que c'est « et/ou »), si on ajoute ce qui est dans A et ce qui est dans B, on compte deux fois ce qui est dans A et dans B, on l'enlève donc une fois.

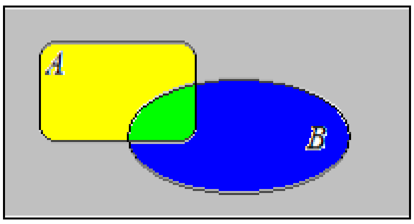
Exemple 3.6 : Dans une classe, 20 % des élèves ont pris option arts plastiques, 40 % l'option badminton et 10 % les deux. On interroge au hasard un élève de cette classe.
On note A l'événement « il fait arts plastiques » et B l'événement « il fait badminton ».

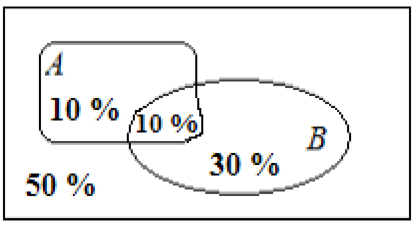
1. Faire un diagramme illustrant la situation.
2. Ecrire une phrase traduisant les événements $A\cap B$ et $\overline{A}$.
3. Donner sans justifier $P(A)$, $P(B)$ et $P(A\cap B)$ puis calculer $P(\overline{A})$ et $P(A\cup B)$.

Réponses :

1. On peut proposer le diagramme suivant (on parle parfois de diagramme de Wenn) :

- jaune pour les 10 % qui font arts et pas badminton ;
- bleu pour les 30 % qui font badminton mais pas arts ;
- vert pour les 10 % qui font les deux ;
- jaune + vert pour les 20 % qui font arts (ça inclut ceux qui font badminton et ceux qui ne font pas badminton) ;
- bleu + vert pour les 40 % qui font badminton (ça inclut ceux qui font arts et ceux qui ne font pas arts) ;
- gris pour ceux qui ne font ni arts ni badminton.





2. L'événement $A\cap B$ signifie « il fait arts plastiques et badminton » et l'événement $\overline{A}$ signifie « il ne fait pas arts plastiques ».

3. On a d'après l'énoncé :

- $P(A)=\frac{20}{100}=0{,}2$ car 20 % des élèves ont pris option arts plastiques (jaune + vert) ;
- $P(B)=\frac{40}{100}=0{,}4$ car 40 % ont pris l'option badminton (vert + bleu) ;
- $P(A\cap B)=\frac{10}{100}=0{,}1$ car 10 % ont pris les deux options (vert).

On peut alors calculer :

- $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}2=0{,}8$, ce qui signifie que 80 % des élèves ne font pas arts (gris + bleu, c-à-d tout ce qui n'est pas jaune ou vert) ;
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}2+0{,}4-0{,}1=0{,}5$ ce qui signifie que 50 % des élèves font arts ou badminton (jeune + vert + bleu ; on rappelle que c'est un « ou inclusif », c-à-d un « et/ou »).

Exemple 3.7 : Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'une autre classe.

	Arts plastiques	Pas arts plastiques	Total
Badminton	4		
Pas badminton			20
Total		24	35

1. Compléter le tableau.

2. On interroge au hasard un élève de cette classe. Donner la probabilité (sous forme de fraction)

a. qu'il fasse badminton ;

b. qu'il fasse arts plastiques ;

c. qu'il fasse badminton et arts plastiques ;

d. qu'il fasse badminton ou arts plastiques.

3. On interroge au hasard un élève faisant arts plastiques. Donner la probabilité qu'il fasse badminton.

4. On interroge au hasard un élève faisant badminton. Donner la probabilité qu'il fasse arts plastiques.

Réponses :

	Arts plastiques	Pas arts plastiques	Total
Badminton	4	11	15
Pas badminton	7	13	20
Total	11	24	35

1. On peut faire : 35 – 20 = 15 (total badminton) puis 15 – 4 = 11 (badminton et pas arts) puis 24 – 11 = 13 (pas badminton et pas arts) puis 35 – 24 = 11 (total arts) puis 11 – 4 = 7 (arts et pas badminton).

2. On interroge au hasard un élève de cette classe : on a donc 35 possibilités, les probabilités pourront donc être données avec 35 comme dénominateur.

a. La probabilité qu'il fasse badminton est $P(B)=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ (15 élèves font badminton sur 35 en tout).

b. La probabilité qu'il fasse arts plastiques est $P(A)=\frac{11}{35}$ (11 élèves font arts sur 35 en tout).

c. La probabilité qu'il fasse badminton et arts plastiques est $P(A\cap B)=\frac{4}{35}$ (4 élèves font arts et badminton sur 35 en tout).

d. La probabilité qu'il fasse badminton ou arts plastiques est $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{11}{35}+\frac{15}{35}-\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$ (11 élèves font arts, 15 font badminton mais si on ajoute 10 et 14, on compte deux fois ceux qui font les deux, on enlève donc 4 qui font les deux ce qui donne 22 élèves sur 35 en tout).

3. Il y a 4 élèves faisant badminton **parmi** les 11 qui font arts, la probabilité est donc $\frac{4}{11}$.

4. Il y a 4 élèves faisant arts **parmi** les 15 qui font badminton, la probabilité est donc $\frac{4}{15}$.

Remarque 3.8 : Ne pas confondre les réponses aux questions 2.c., 3. et 4. . On s'intéresse aux mêmes élèves (ceux qui font les deux options) mais à chaque fois l'ensemble de référence est différent :

- question 2.c. , c'est par rapport à toute la classe ;
- question 3. , c'est par rapport à ceux qui font arts plastiques ;
- question 4. , c'est par rapport à ceux qui font badminton.

Remarque 3.9 : On utilise parfois un « arbre » pour représenter une situation.

Exemple 3.10 : Yazid est en retard pour aller au lycée. Il a dans son placard 3 paires de gants (une paire bleue, une jaune et une rouge) et 2 bonnets (un bleu et un rouge). Il prend au hasard une paire de gants et un bonnet. On considère qu'il a autant de chances une prendre chaque paire de gants et chaque bonnet.

1. Représenter cette situation par un arbre.

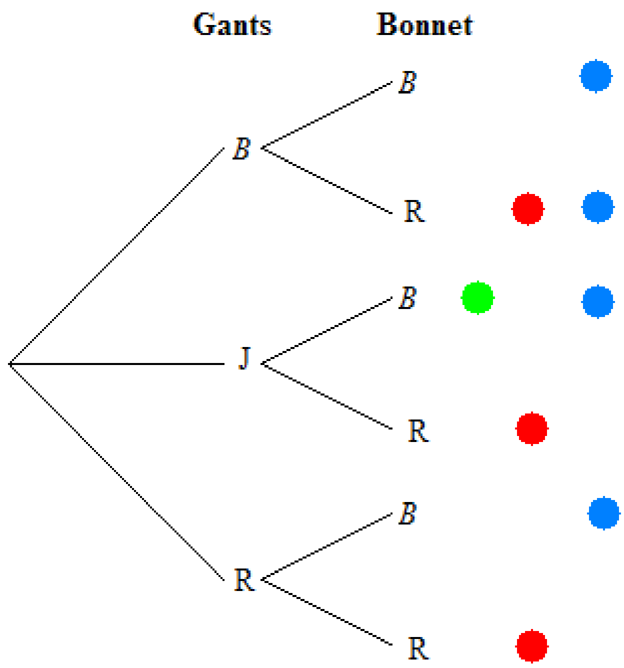
2. Quelle est la probabilité qu'il ait des gants jaunes et un bonnet bleu ?

3. Quelle est la probabilité qu'il ait un bonnet rouge ?

4. Quelle est la probabilité qu'il ait des gants ou un bonnet bleu ?

Réponses :

1. On peut proposer l'arbre suivant : on a autant de chances de suivre chacun des chemins (quand on va de gauche à droite) : d'abord la couleur des gants puis la couleur du bonnet.



2. La probabilité qu'il ait des gants jaunes et un bonnet bleu est $\frac{1}{6}$ (1 « chemin » sur 6, voir point vert).

3. La probabilité qu'il ait un bonnet rouge est $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (3 « chemins » sur 6, voir points rouges).

4. La probabilité qu'il ait des gants ou un bonnet bleu est $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (4 « chemins » sur 6, voir points bleus).

Remarques 3.11 :

- Les « traits » sont appelés « branches ».
- Les points d'intersection de plusieurs branches sont appelés « nœuds » .
- On considère aussi des arbres dits « pondérés » dans lesquels les probabilités d'emprunter des branches partant d'un même nœud ne sont pas forcément égales (plutôt au programme de première).