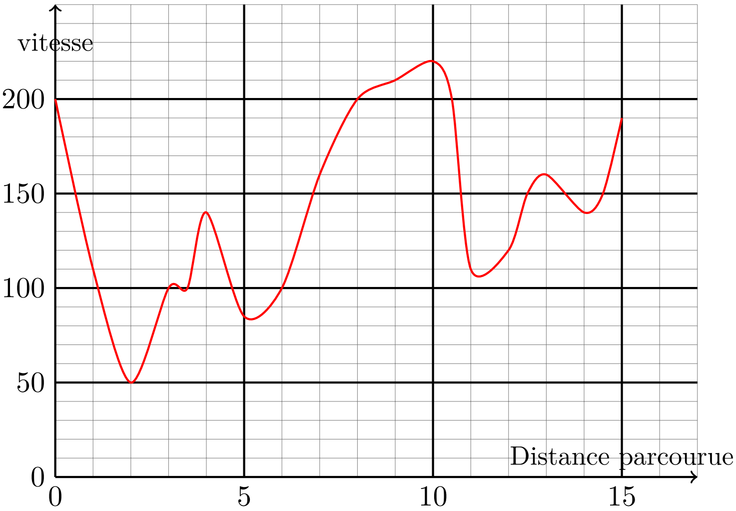
Activité introductrice

Sur un circuit automobile, un pilote de course procède à des essais sur un circuit fermé. Sur un tour lancé de sa voiture, des enregistreurs de vitesse placés sur le circuit, ainsi qu'un capteur de vitesse embarqué, ont permis d'établir le tableau et le graphique suivants.

Enregistreur n	Distance parcourue depuis la ligne de départ en km	Vitesse en km/h
1	0	
2	0,5	182
3		50
4	5,1	86
5	8	
6	10	220
7	13	
8	15	190



1. (a) Compléter les valeurs manquantes du tableau.
   (b) Combien de fois pilote atteint-il la vitesse de 160 km/h ?
2. Que pensez vous des deux affirmations suivantes ? Argumenter votre réponse.
   * « A toute distance d comprise entre 0 et 15 km correspond une vitesse unique de la voiture de course. »
   * « A toute vitesse v comprise entre 50 et 220 km/h correspond une distance unique. »

I Premières définitions et vocabulaire

Définition 1

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ (on dit aussi sur $\mathscr{D}$), c'est associer à tout nombre x de $\mathscr{D}$ un **unique** réel, noté $f(x)$. On le note $\begin{array}{rccc} f : & \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Vocabulaire :

— Le réel x est appelé la **variable**.

— Le réel $f(x)$ est appelé l' **image** de x par la fonction f.

— Le réel x est appelé un **antécédent** par la fonction f de $f(x)$.

Il y a différentes manières pour définir une fonction :

— par la donnée d'une formule de calcul (ou explicite)

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x$. On le note $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+3x \end{array}$.

$f(4) =$ .... L'image de ... est ...; Un antécédent de ... est ....
$f(-3) =$ .... L'image de ... est ...; Un antécédent de ... est ....

— par la donnée d'un tableau de valeurs.

Exemple 2 : Soit g la fonction définie par le tableau suivant :

x	1	2	3
$g(x)$	-2	0	-2

Quel est l'ensemble de définition de g ? ....
0 est .... de 2.
3 est .... de -2.

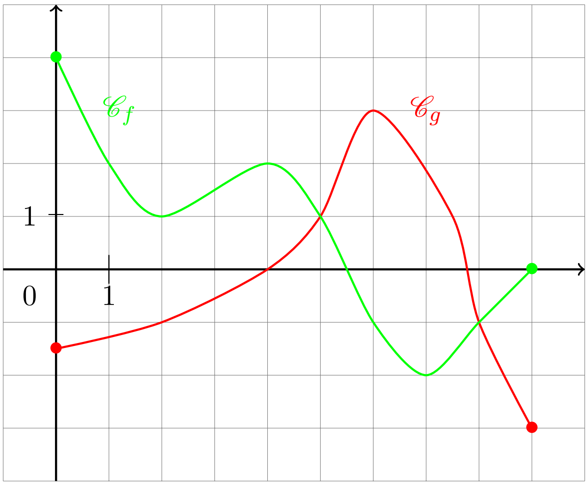
— par la donnée d'une courbe.

Exemple 3 : Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne les courbes représentatives,

a) Donner les ensembles de définition

b) Lire si possible l'image de 0 ? de 2 ? de 4 ?

c) Lire si possible les antécédents de 1 ? de -2 ? de 4 ?



II Représentation graphique

Définition 2

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. On munit le plan d'un repère.
La courbe représentative de la fonction f dans ce repère (ou représentation graphique), notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

$$\begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

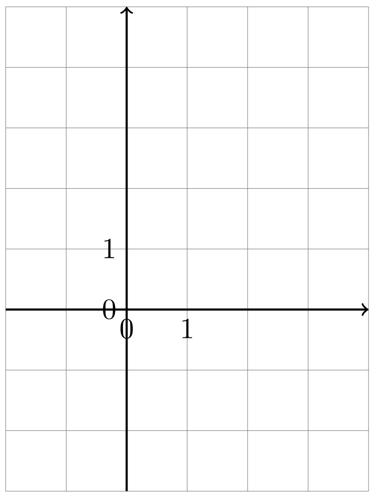
On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

Comment construire une courbe représentative ?

1. On construit un tableau de valeurs.
2. On place les points obtenus dans un repère.
3. On relie les points de manière « fluide ».

Exemple 4 : Construire dans le repère ci contre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x$.

Le point $A(1.1, -2.1)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$?
Le point $B(-10{,}130)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$?



Comment savoir si un point appartient ou non à la courbe représentative d'une fonction ?
Le point $M(x{,}y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si ....

III Résolution graphiques d'équation et d'inéquations

Exemple 5 : Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne les courbes représentatives,

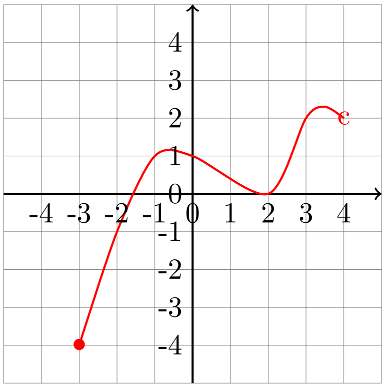
a) Donner les ensembles de définition

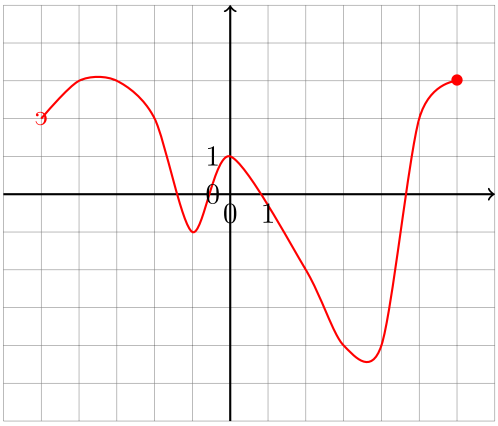
b) Résoudre par lecture graphique l'équation $f(x) = -4$.

c) Résoudre par lecture graphique l'équation $f(x) = 3$ puis $f(x) = -1$. Quel problème se pose-t-il ?

d) Résoudre par lecture graphique l'équation $f(x) > 2$.

e) Résoudre par lecture graphique l'équation $f(x) \leqslant 3$.





Résoudre l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer un antécédent d'un réel k :
Les solutions de $f(x) = k$ sont .... des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = k$.

Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant k$ (respectivement $f(x) \geqslant k$) :
Les solutions de $f(x) \leqslant k$ (respectivement $f(x) \geqslant k$) sont ....
....

Attention, dans le cas d'une résolution d'équation ou d'inéquation, on doit rédiger sa réponse avec une phrase !

Quels sont selon vous les avantages et inconvénients de la méthode graphique ?

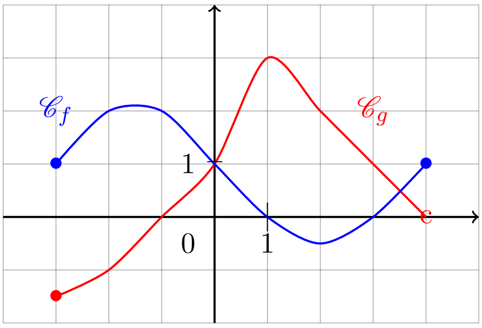
Un cas particulier : lire le signe d'une fonction

On rappelle qu'un nombre x est positif s'il est supérieur à zéro $x > 0$, négatif s'il est inférieur à zéro $x < 0$. A partir d'une courbe, on peut donc lire le signe de la fonction, c'est à dire les intervalles sur lesquels $f(x)$ est positif, nul ou négatif :

- f est positive lorsque sa courbe représentative est située au dessus de l'axe des abscisses.
- f est négative lorsque sa courbe représentative est située en dessous de l'axe des abscisses.
- Lorsque f coupe l'axe des abscisses, f s'annule.

On récapitule ces information dans un tableau, appelé le tableau de signe de la fonction.

Exemple 6 : Dresser les tableau de signes des fonctions définies par les courbe ci-dessous :



Et avec deux courbes...

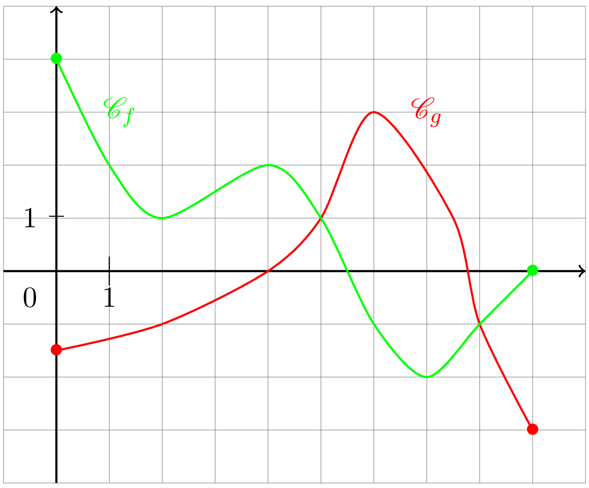
Exemple 7 : Soit f et g deux fonction définies sur $[0; 9]$ par les courbes représentatives suivantes,

a) Résoudre $f(x) \leqslant 0$.

b) Résoudre $g(x) > 2$.

c) Résoudre $f(x) = g(x)$.

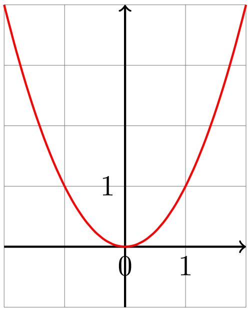
d) Résoudre $f(x) \geqslant g(x)$.

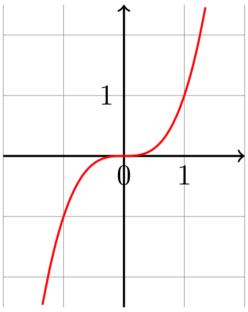


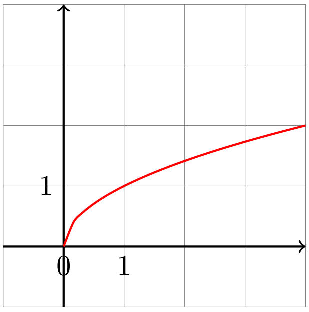
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont ....
....

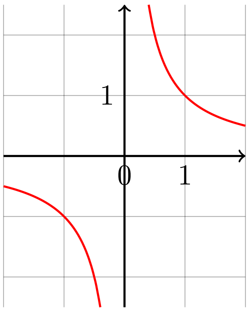
Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ (respectivement $f(x) \geqslant g(x)$) sont ....
....

IV Fonctions usuelles









Définition 3

Une fonction est dite **paire** si pour tout x de $\mathbb{D}_f$, :

- ....
- ....

Une fonction est dite **impaire** si pour tout x de $\mathbb{D}_f$, :

- .... (on dit aussi que D_f est symétrique par rapport à 0).
- ....

Exemple 8 : La fonction carrée est paire.

Exemple 9 : Les fonctions .... et .... sont impaires.

Remarque : La plupart des fonctions ne sont ni paires, ni impaires.

Propriété 1

La courbe représentative d'une fonction **paire** dans un repère orthogonal est ....

La courbe représentative d'une fonction **impaire** dans un repère orthogonal est ....