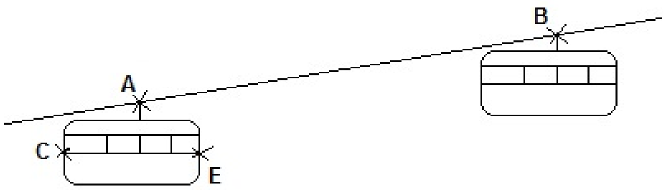
I Vecteurs du plan

1 Définitions

Exemple introductif : Le téléphérique
La cabine monte du point A au point A'.

a) Décrire le mouvement de la cabine ? Quelle transformation reconnaît-on ?

b) Comment pourrait-on représenter ce mouvement ?



c) Où se situe C' l'image du point C ? et celle de E ?

d) Complétez :
Les segments $[AA']$ et $[CC']$ sont .... et ....
Donc $AA'C'C$ est un ....

Définition 1

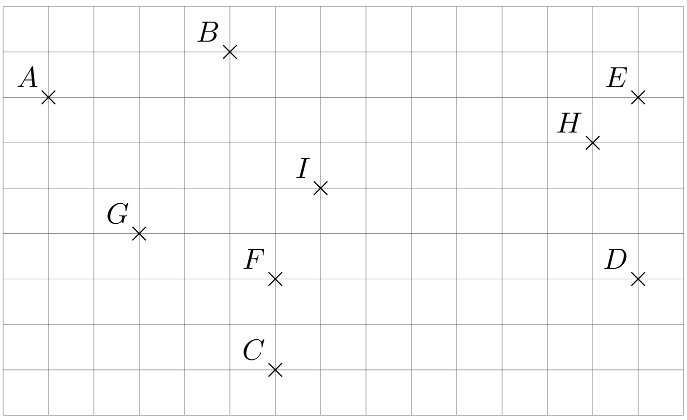
Soit A et B deux points du plan,

A est appelé . . . . et B est appelé . . . .

Si les points A et B sont confondus, on parle de . . . . , noté . . . . . .

En sciences physiques, les vecteurs permettent de représenter des déplacements, mais aussi des forces.
Exemple 1 :

- ◇ Tracer en bleu les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
  Qu'ont ils en commun ? Qu'ont-ils de différent ?
- ◇ Tracer en noir les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{CF}$
  Qu'ont ils en commun ? Qu'ont-ils de différent ?
- ◇ Tracer en vert les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HD}$
  Qu'ont ils en commun ? Qu'ont-ils de différent ?
- ◇ Tracer en rouge les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BI}$
  Qu'ont ils en commun ? Qu'ont-ils de différent ?



Propriété 1

Le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par
— sa direction :
— son sens :
— sa longueur, appelée norme :

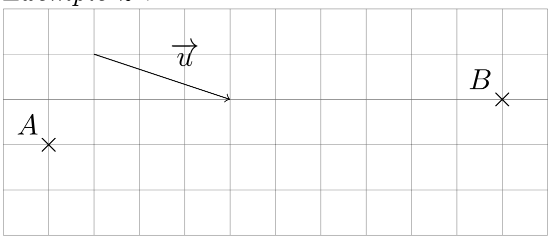
Le vecteur nul, comme $\overrightarrow{AA}$, n'a ni direction ni sens et une longueur nulle.

2 Vecteurs égaux

Propriété 2

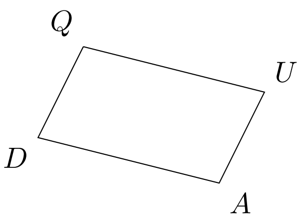
Deux vecteurs qui ont même direction, même sens et même norme sont égaux.
En fait ils correspondent au même déplacement (à la même translation). On dit que ce sont deux représentants du même vecteur, que l'on peut noter avec une lettre minuscule comme $\overrightarrow{u}$.

Exemple 2 :



Construire le représentant d'origine A de $\overrightarrow{u}$.
Construire le représentant d'extrémité B de $\overrightarrow{u}$.

Propriété 3 (caractérisation du parallélogramme)



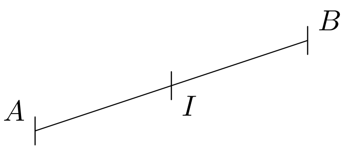
QUAD est un parallélogramme (éventuellement aplati)
si et seulement si . . . .

Exercice classique

1. Construire deux parallélogrammes ABCD et ABEF.
2. Démontrer que CDFE est un parallélogramme.

Les vecteurs portent beaucoup d'informations (direction, sens et longueur). Ils sont donc un outil puissant de géométrie, permettant d'alléger l'écriture des démonstrations.

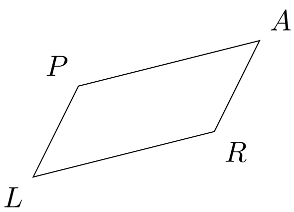
Propriété 4 (caractérisation du milieu)



I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si . . . .

Exercice Soit PARL un parallélogramme.

1. Construire M, le symétrique de L par rapport à R.
2. Démontrer que PAMR est un parallélogramme.



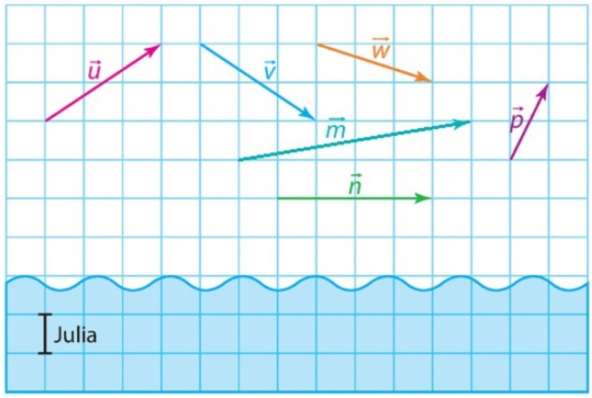
II Opérations sur les vecteurs

1 somme de vecteurs

20 min

2 Enchaîner deux translations

Julia décide de tester le kitesurf. Il est représenté par le segment vertical. Le but est de déterminer les nouvelles positions de Julia suite aux différentes bourrasques de vent auxquelles elle fait face, représentées par les vecteurs.



1. a) Sur votre cahier, recopier le segment représentant Julia puis construire son image par la translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Construire l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{w}$.

Remarque On dit que l'on a trouvé l'image du segment par l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{w}$.

c) L'enchaînement de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ est également une translation dont le vecteur est noté $\vec{u} + \vec{w}$.

À quel vecteur représenté sur cette figure correspond le vecteur $\vec{u} + \vec{w}$?

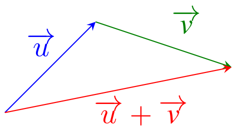
2. a) Julia poursuit ses essais. Construire l'image du nouveau segment obtenu par la translation de vecteur $\vec{p}$.

b) Construire l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

c) Émettre une conjecture sur $\vec{p} + \vec{v}$.

Cours 2 p. 139

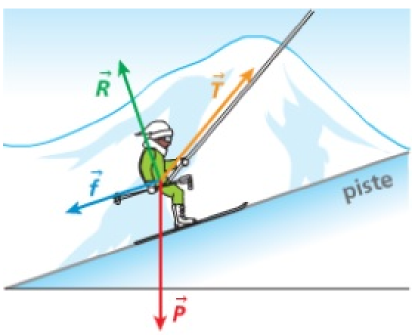
Définition 2

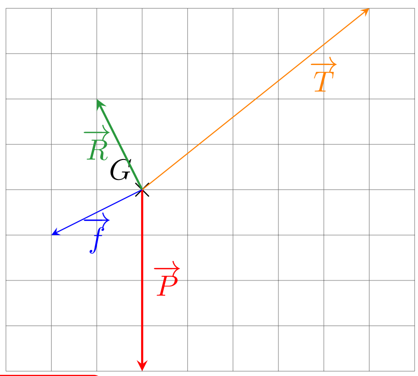


L'enchaînement des translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est une translation, de vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

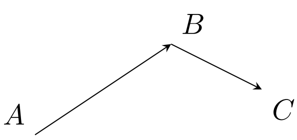
Concrètement, pour construire un représentant du vecteur somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, on construit « bout à bout » (l'extrémité de l'un est origine de l'autre) un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ et un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$.

Exemple 3 : Construire la somme des forces exercées sur le skieur.





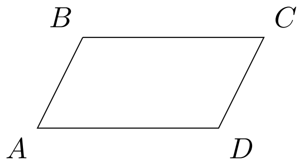
Propriété 5 (Relation de Chasles)



Quels que soient les points A, B, et C du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \ldots$

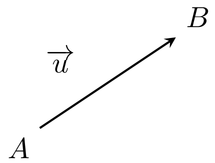
Attention, c'est faux en terme de longueur $AB + BC$ .... !

Propriété 6 (Règle du parallélogramme)



ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \dots$

2 soustraction de vecteurs



Une conséquence de la relation de Chasles est que, pour tous points A et B,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \dots$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est .... du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On le note ....

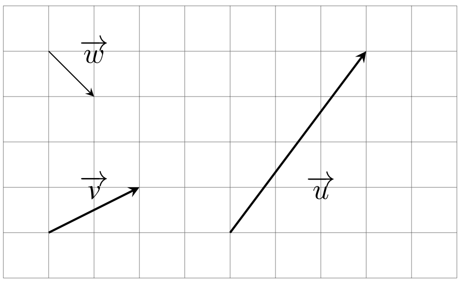
Il a ....

Définition 3

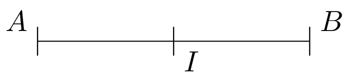
Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé.

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$$

Exemple 4 : Construire $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$



Propriété 7 (d'autres caractérisations du milieu)



I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si ....

3 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 4

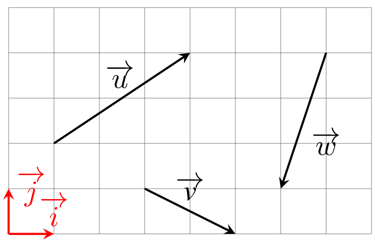
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel strictement positif,

- le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a même direction, même sens que $\overrightarrow{u}$ et $||k\overrightarrow{u}|| = k \times ||\overrightarrow{u}||$ (sa longueur est k fois plus grande)
- le vecteur $-k\overrightarrow{u}$ a même direction que $\overrightarrow{u}$ mais un sens opposé et $||-k\overrightarrow{u}|| = k \times ||\overrightarrow{u}||$ (sa longueur est k fois plus grande)

Si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

La multiplication des vecteurs par un réel est distributive par rapport à l'addition.
$k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{k}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{k}$, $\quad (k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$ et $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$.

III Coordonnées et vecteurs



$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non nuls de même longueur et de directions perpendiculaires. Ils constituent une **base orthonormée**. Leur norme est l'unité de longueur.

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Propriété 8 (opérations)

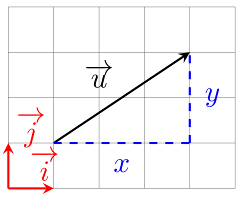
Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **égaux** si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors leur **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et un réel k, alors le **produit** $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple 5 : Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{p} = -7\vec{u}$ et $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

Propriété 9

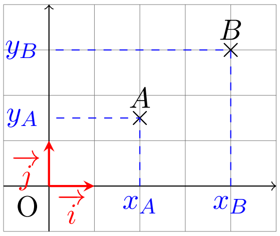


Dans une base orthonormée,

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| =$ ....

Exemple 6 : Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

Propriété 10

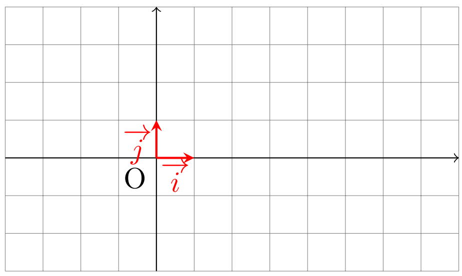


Dans un repère orthonormé,

Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ....

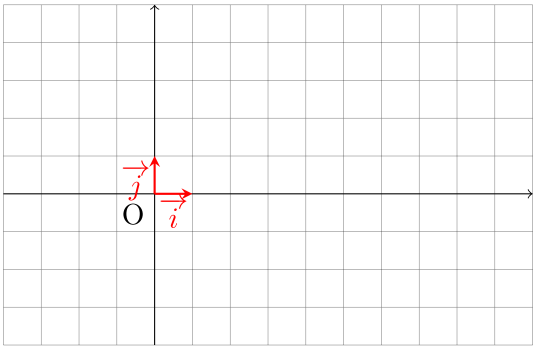
On retrouve que $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| =$ ....

Exemple 7 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3; -1)$, $B(5; -2)$ et $C(7; 3)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.



Exemple 8 : Dans le repère orthonormé ci-contre

1. Placer les points A(-1 ;1) B(3 ;2) C(2 ;-2) D(-2 ;-3)
2. Montrons de deux manières différentes que ABCD est un parallélogramme.
   (a) Methode 1 : Calculer les coordonnées des milieux des diagonales [AC] et [BD]. Conclure.
   (b) Methode 2 : Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Conclure.
3. Calculer les longueurs AB et BC. Conclure.
4. Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.
5. Que peut on dire des points D, C et E ?



IV Colinéarité

5 La colinéarité, à quoi ça sert ?

15 min

1. Dans un repère orthonormé, placer les points :
A(–2 ; 6), B(–8 ; –3), C(–3 ; –2), D(–1 ; 1), E(–6 ; 0), F(1 ; 4), G(3 ; 2), H(1 ; –1) et K(–2 ; –1).

2. a) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{GH}$, et $\overrightarrow{GK}$.

b) Parmi eux, lesquels semblent avoir la même direction que $\overrightarrow{CD}$?

c) Recopier le tableau suivant. Écrire le nom des vecteurs trouvés dans la première ligne du tableau puis le compléter en calculant leurs coordonnées.

Vecteur	$\overrightarrow{CD}$				
Première coordonnée					
Deuxième coordonnée					

3. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Vérifier en calculant le produit en croix entre la première colonne et les autres colonnes, les unes après les autres.

4. Exprimer les vecteurs du tableau en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sous la forme $k\overrightarrow{CD}$ où k est un réel.

5. Observer la position relative des droites (AB) et (CD), (CD) et (CF) ainsi que (GH) et (GK). Faire une conjecture liant la position relative des droites avec la colinéarité potentielle des vecteurs.

Cours 5 p. 142

Définition 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. S'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** (k est le coefficient de colinéarité).

Remarques :

- le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs car, quelque soit $\vec{u}$, $0 \times \vec{u} = \vec{0}$
- Si deux vecteurs non nuls sont colinéaires, ils ont la même direction (des supports parallèles)
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $\vec{u} = \dfrac{1}{k}\vec{v}$

Propriété 11 (test de colinearite)

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

On appelle **déterminant** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Application en géométrie : Soient A, B, C et D quatre points distincts.

- **Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ($det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$).**

Exemple 9 : Soient $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$, $C(-5; -1)$, $D(1; 2)$.

$a)$ Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$b)$ Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

- **Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ($det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$).**

Exemple 10 : Soient $M(-5; 4)$, $N(-1; 2)$, $P(23; -10)$. Les points M, N et P sont ils alignés ?