

I Généralités (séance 1 : environ 1h)

1 Définition

Définition 1

Une fonction f est dite **affine** si et seulement si il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 $f(x) = ax + b$.

a est appelé le **coefficient directeur**

b est appelé l'**ordonnée à l'origine**

Les fonctions affines sont donc définies sur \mathbb{R}

Exemple 1 : $f(x) = 3 - 2x$

coefficient directeur $a = \dots$

ordonnée à l'origine $b = \dots$

Exemple 2 : $g(x) = (x + 1)^2 - (x - 2)(x + 2)$

sous cette écriture, il n'est pas évident que g est une fonction affine mais si on développe son expression :

Exemple 3 : Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est affine ou non et, si oui, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

$f(x) = 3x - 4$	$g(x) = 5 - 2x$	$h(x) = (2x - 3)^2$	$i(x) = \frac{2x - 3}{3}$	$j(x) = (x - 1)^2 - (x + 3)^2$
$a = \dots$				
$b = \dots$				

Remarque : Deux cas particuliers :

- si $a = 0$, la fonction f est dite **constante**, égale à b .
- si $b = 0$, la fonction f est dite **linéaire**.

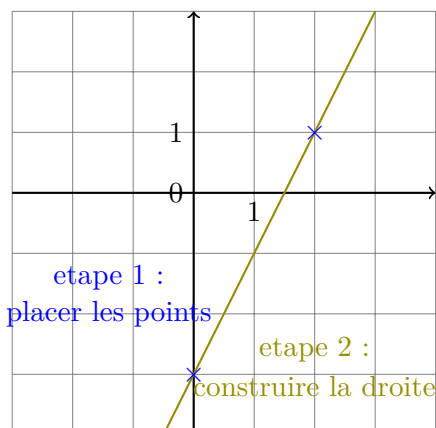
2 Représentation graphique

Propriété 1

Dans un repère $(O; I; J)$ quelconque du plan, la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite.

On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$.

Exemple 4 : Construisons la représentation graphique de $f : x \mapsto 2x - 3$ (c'est à dire $f(x) = 2x - 3$)



méthode 1 : On construit deux points.

Pour cela, on choisit (au hasard) deux valeurs de x différentes et on calcule leurs images respectives.

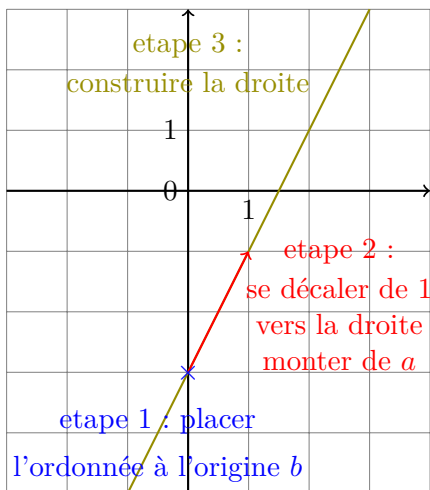
par exemple, je peux choisir $x = 0$ je calcule $f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$ puis, je peux choisir $x = 2$ je calcule $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$.

On présente généralement cela sous la forme d'un petit tableau.

x	0	2
$f(x)$	-3	1

Puis on place les points correspondants, donc ici de coordonnées $(0; -3)$ et $(2; 1)$.

La droite passant par ces deux points est la représentation graphique de la fonction f .

**méthode 2 :**

f a pour ordonnée à l'origine -3 . On place donc le point sur l'axe des ordonnées (axe vertical) d'ordonnée -3 .

En partant de ce point, on se décale de 1 vers la droite et on « monte » du coefficient directeur : ici 2.

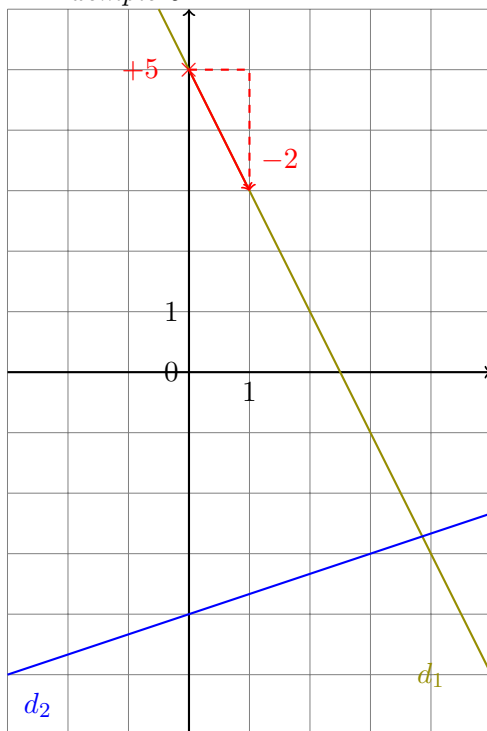
Si le coefficient directeur est négatif, on « descend ».

On obtient un deuxième point.

La droite passant par ces deux points est la représentation graphique de la fonction f .

Résumé de cette deuxième méthode :

- 1 On place le point d'abscisse 0 et d'ordonnées b (il est sur l'axe vertical)
- 2 On construit à partir de ce point le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ (on dit que c'est un vecteur directeur de la droite).
- 3 On trace la droite.

Exemple 5 :

1. Construire la droite D d'équation $y = 3x - 2$ (c'est à dire représentative de la fonction affine f telle que pour tout x , $f(x) = 3x - 2$)
2. Représenter graphiquement les fonctions $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ et $h(x) = -2.5x$.
3. Lire les équations réduites des droites d_1 et d_2 et donner les expressions des fonctions f_1 et f_2 associées.

Pour lire l'expression d'une fonction affine/l'équation d'une droite

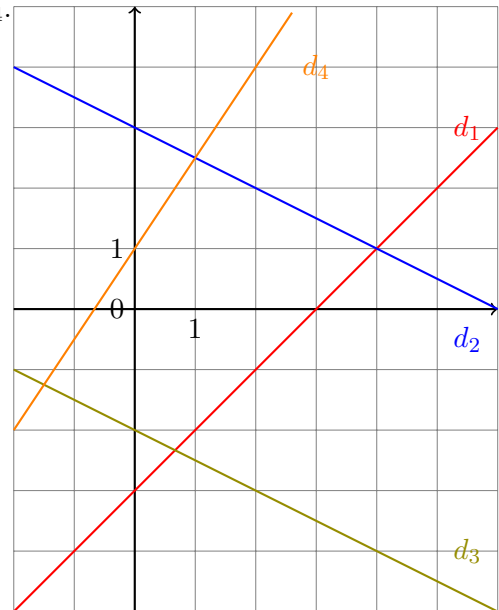
- 1 On lit son ordonnée à l'origine (l'ordonnée à laquelle la droite coupe l'axe vertical)
- 2 A partir de ce point, on se décale de 1 vers la droite et on lit « de combien on monte/descend » pour retrouver la droite : c'est le coefficient directeur (coefficient de x)

Remarques :

- La droite représentative d'une fonction affine n'est jamais parallèle à l'axe des ordonnées (verticale).
- La droite représentative d'une fonction linéaire passe par l'origine.
- Une fonction constante est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

Exercice 1

1. Lire les fonctions affines associées aux droites d_1, d_2, d_3 et d_4 .



2. Construire les droites représentatives des fonctions

- $f_a(x) = 3x - 4$
- $f_b(x) = x - 1$
- $f_c(x) = -2x + 3$
- $f_d(x) = -\frac{5}{4}x + 2$

Remarques :

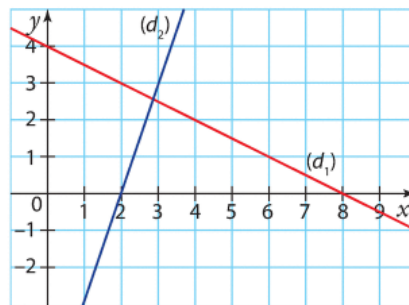
- On retrouve le sens de variation des fonctions affines (déjà démontré au chapitre précédent) :
 - Si son coefficient directeur a est positif, la fonction affine est croissante (la droite « monte »)
 - Si son coefficient directeur a est négatif, la fonction affine est décroissante (la droite « descend »)
- Les droites d_2 et d_3 sont parallèles, les fonctions affines associées ont le même coefficient directeur.

Exercice 2**7. Interpréter la courbe d'une fonction**

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

- $f(x) = 3x - 6$
- $g(x) = -0,5x + 4$

Leurs droites représentatives ont été tracées dans le repère ci-contre.



1. Associer chaque fonction à sa droite représentative.

2. Résoudre par le calcul

$$f(x) \geq 0 \text{ et } g(x) < 0.$$

3. Contrôler graphiquement les résultats de la question précédente.

II Sens de variation et Signe d'une fonction affine (séance 2 : environ 1h)

Propriété 2

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine, $a \neq 0$.
 si $a > 0$

si $a < 0$

tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
f	↗ 0 ↘		

tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
f	↘ 0 ↗		

tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Exemple 6 : : Donner le tableau de signe de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - 3$
 Le coefficient directeur est **2** (donc la fonction est croissante) donc son tableau est de la forme :

x	$-\infty$?	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Pour trouver la valeur de x à mettre dans le tableau :

— soit on applique la formule en faisant bien attention quand il y a des signes « - ».

ici $\frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

— soit on résout l'équation :

$2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2} \iff x = 1.5$

donc

x	$-\infty$	1.5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

La même chose expliquée dans le livre...

Propriété Signe d'une fonction affine

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

La fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

f est négative puis positive.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

f est positive puis négative.

Exemple

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g : x \mapsto -3x + 4$.

$g(x) = ax + b$ avec $a = -3$, a est négatif, donc g est décroissante sur \mathbb{R} .

On recherche la valeur qui annule $g(x)$:

$-3x + 4 = 0$ soit $x = \frac{-4}{-3}$ soit $x = \frac{4}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-3x + 4$	+	0	-

Exercice résolu 2 p. 249

A vous de compléter les tableaux de signes suivants :

x	$-\infty$?	$+\infty$
$2x + 4$? 0 ?	

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x - 2$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$-3x - 9$		0

x	$-\infty$	$+\infty$
$-5x$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$6 - 2x$		

Exercices :

16 Compléter les tableaux de signes suivants.

a)

x	$-\infty$...	$+\infty$
$2x - 9$...	0 ...

b)

x	$-\infty$...	$+\infty$
$-11x - 5$...	0 ...

18 Voici un tableau de signes incomplet de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x + 8$.

Calculer $f(0)$ et $f(4)$ puis compléter le tableau.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-4x + 8$...	0 ...

24 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $3x + 5$ b) $-x + 4$ c) $-2x$ d) $\frac{1}{2}x + 4$

III Application à la résolution d'inéquations (séance 3 : environ 2h)

Activité introductive

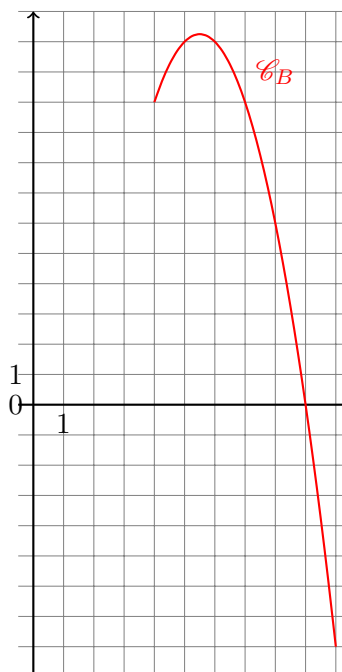
Une entreprise fabrique des pièces mécaniques. Elle peut en produire entre 40 et 100 par jour. On note x sa production journalière en dizaine. On a donc $x \in [4; 10]$.

Elle estime que son bénéfice dépend du nombre de pièces fabriquées. Cette relation est modélisée par la fonction $B(x) = -x^2 + 11x + 18$.

On souhaite savoir pour quelles valeurs de x est ce que l'entreprise est rentable, c'est à dire que son bénéfice est positif.

Il faudrait donc résoudre : $B(x) \geq 0 \iff -x^2 + 11x + 18 \geq 0$.

MAIS comme c'est une inéquation du second degré, nous ne savons pas résoudre cette inéquation. Comment faire ?



idée 1 : lire graphiquement la solution

Avantages : rapide, pas de calcul

Inconvénients : il faut avoir le graphique, cela peut manquer de précision.

idée 2 : Résoudre l'inéquation par le calcul

Avantages : on aura la valeur exacte

Inconvénients : cela exige des efforts de calcul :

1. D'abord, montrer que $B(x) = (2 - x)(x - 9)$.

En effet, $(2 - x)(x - 9) = \dots$

2. Donner les tableaux de signes des deux facteurs $2 - x$ et $x - 9$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x + 2$		

x	$-\infty$	$+\infty$
$x - 9$		

3. La règle des signes nous indique que

- Le produit de deux nombres positifs est ...
- Le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est ...
- Le produit de deux nombres négatifs est ...

Nous rassemblons donc nos informations sur les signes dans un seul tableau, en respectant bien l'ordre des valeurs de x

x	$-\infty$	2	9	$+\infty$
$-x + 2$		+	-	-
$x - 9$		-	0	+
$(-x + 2)(x - 9)$...	0	...

4. Conclure :

Si je cherche quand mon expression est positive, je cherche dans la ligne finale les signes +. Je lis les abscisses correspondantes.

Dans mon exemple, cela se produit soit quand $x \in [2; 9]$ (mais ces solutions ne m'intéressent pas toutes pour mon problème ici car l'entreprise ne fabrique pas moins de 4 dizaines de pièces...) : donc il faut fabriquer entre 4 et 9 dizaines de pièces pour que l'entreprise fasse des bénéfices.

Solution à la question de math $B(x) \geq 0$: $S = [2; 9]$.

Solution au problème d'économie $B(x) \geq 0$ et $x \in [4; 10]$: $S = [4; 9]$.

Exemple 7 :

Résoudre $(2x + 1)(3x - 6) < 0$				
x	$-\infty$	$+\infty$
$2x + 1$				
$3x - 6$				
$(2x + 1)(3x - 6)$				
Conclusion : $S = \dots$				

Résoudre $x(-x + 3)(x + 1) > 0$					
x	$-\infty$	$+\infty$
x					
$-x + 3$					
$x + 1$					
$x(-x + 3)(x + 1)$					
Conclusion : $S = \dots$					

Remarques :

- Un produit $A \times B$ peut être positif parce que ses deux facteurs A et B sont négatifs. L'idée suivante est fautive : ~~Un produit est positif si et seulement si un facteur est positif~~
Il ne faut donc pas généraliser la propriété (vraie) : Un produit est nul si et seulement si un facteur est nul.
- le produit peut avoir 2,3 , 4 ...facteurs. On met autant de lignes que de facteurs dans le tableau, avant de faire la ligne bilan. Il faut pour chaque colonne compter les signes - : s'il y en a un nombre pair, le résultat est positif. Si leur nombre est impair le résultat est négatif.
- On peut généraliser la méthode avec des facteurs du second degré dont le signe serait évident, comme $x^2 + 1$ qui est toujours positif.

Exemple 8 : Avec un quotient

On souhaite résoudre $\frac{2x - 6}{x + 2} \geq 0$

1. Calculer les valeurs d'annulation de $2x - 6$ et $x + 2$ afin de veiller à les placer dans le bon ordre dans le tableau de signe, puis compléter les 2 premières lignes de signe.

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x - 6$
$x + 2$
$\frac{2x - 6}{x + 2}$	+	...	-	...

2. La règle des signes pour un quotient est la même que pour un produit :

- Le quotient de deux nombres positifs est positif.
- Le quotient d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif.
- Le quotient de deux nombres négatifs est **positif**.

La différence est lorsque l'un des facteur est nul (vaut 0).

- si ce facteur (donc le 0) est au numérateur (au dessus) alors le quotient est nul : on met 0 dans la ligne « résultat » du tableau.
- si ce facteur (donc le 0) est au dénominateur (en dessous) alors le quotient n'existe pas : on met une double barre || dans la ligne « résultat » du tableau.

Bien relire l'exemple du livre :

3 Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

→ Cours 3 p. 246

1. Étudier le signe de $2x + 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier le signe de $-x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le signe de $A(x) = (2x + 4)(-x + 3)$ et de $B(x) = \frac{2x + 4}{-x + 3}$.

Solution

1. $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$ 1

De plus, $a = 2 > 0$ donc $x \mapsto 2x + 4$ est croissante sur \mathbb{R} .

On en déduit le tableau de signes suivant. 2

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x + 4$	-	0	+

2. $-x + 3 = 0 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$

De plus, $a = -1 < 0$ donc $x \mapsto -x + 3$ est décroissante sur \mathbb{R} .

On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x + 3$	+	0	-

3. On compile les informations précédentes dans un tableau pour en déduire le signe du produit et du quotient. 3 4 5

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$2x + 4$	-	0	+	+
$-x + 3$	+	+	0	-
$A(x)$	-	0	+	-

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$2x + 4$	-	0	+	+
$-x + 3$	+	+	0	-
$B(x)$	-	0	+	-

Conseils & Méthodes

- 1 Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, on commence par étudier le signe de chaque terme du produit ou du quotient.
- 2 On indique les différents signes dans un même tableau de signes, en faisant attention à l'ordre des nombres dans la première ligne.
- 3 On déduit le signe du produit ou du quotient en utilisant la règle des signes.
- 4 Il ne faut pas oublier d'indiquer les « 0 » du produit ou du quotient.
- 5 Lorsque le quotient n'est pas défini pour une valeur de x (lorsque le dénominateur s'annule), on place une double barre dans le tableau.

Exercices :

29 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (3x - 4)(x + 2)$.

1. Déterminer le signe de $3x - 4$ et de $x + 2$.
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f .

30 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

- a) $h(x) = (-2x + 3)(-3x - 5)$
- b) $u(x) = (2x + 14)(6x + 24)$
- c) $v(x) = (5x - 65)(7 - 2x)$

31 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

- a) $u(x) = \frac{2x + 3}{6x - 4}$
- b) $v(x) = \frac{-3x - 9}{-2x + 7}$
- c) $h(x) = \frac{x + 2}{-x^3}$
- d) $w(x) = \frac{x}{8 - x}$

36 f est une fonction dont voici le tableau de signes.

x	$-\infty$	-5	1	2	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- a) $f(x) = 0$
- b) $f(x) > 0$
- c) $f(x) \leq 0$
- d) $f(x) < 0$

38 1. Étudier le signe de $(x - 2)(-2x + 3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions de $(x - 2)(-2x + 3) > 0$.

39 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes à l'aide d'études de signe.

- a) $(9x - 1)(4 - x) < 0$
- b) $(3x + 2)(4x - 8) \geq 0$
- c) $3x^2 - 6x > 0$
- d) $x^2 - 9 < 0$

Pour c) et d) il faut penser à factoriser avant de dresser le tableau de signes!

40 Sur le modèle de l'exercice 38, résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

- a) $\frac{4x + 4}{-5x - 10} \geq 0$
- b) $\frac{-2x}{x + 8} \leq 0$
- c) $\frac{3x + 27}{5x + 25} < 0$.